Title	表現的見地カラ
Author(s)	高野, 一夫
Citation	全国紙上数学談話会. 267 p.303-p.310
Issue Date	1945-02-15
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75135
rights	
Note	

1202 表現的見地カラ

高野一夫 (浦和)

(1月16日受付)

§0. 数年前ニ J. Haantjes 氏ハ氏ノ把握スル道ノ幾何學ニ関スル考究ノ結果ヲ論文トシタ. (1) ソノ論法ハ真ニ巧デアツテ, 吾々ノ感嘆スルトコロデアルケレドモ, ソノ中カラ少シ許リノ論究ヲ拉チシ去リ、モウ一歩フミ込ンデ表現的ナ考察ヲメグラシテミタイト思フ。勿論ソノ結果ハ新シイモノデハナイケレドモ, カヤウナ方法デモ解釈ガ更新サレル点ヲ御判読サレンコトヲ。

§1. Haantjes ハ先ヅ $\lambda, \mu, \cdots = 0, 1, \cdots n$ ナル添数ヲ用ヒテ n 次元集合体ノ中デ $\mathfrak{X}^\lambda$ ナル斉次座標ヲ導入シ且, 之ニ対シテ

$$(1.1) \qquad \mathfrak{X}^{\lambda'} = \mathfrak{X}^{\lambda'}(\mathfrak{X}^\mu)$$

ト云フ変換ノ集合ヲ添ヘ, $\mathfrak{X}^\lambda$ ハ $\mathfrak{X}^\mu$ ニ関スル 1次ノ斉次解析函数トシ、ソノヤコビアンハ考ヘテヰル点ニ於テハ 0 デハナイモノトシテヰル。

カヤウナ斉次座標ヲモツテヰル n 次元集合体ノコトヲ彼ハ一般化サレタ射影空間トヨビ H_n デ表ハシテヰル。

トコロデ彼ハ又次ノヤウナ制限ヲ与ヘテヰル. 即チ射影接続係数ヲ $\Pi_{\mu\nu}^{\lambda}$ デ表ハストキ、吾々ノ集合体ハ次ノ條件ヲ満足スルモノトスルノデアル.

(1.2)　$\Pi^{\lambda}_{\mu\nu} = \Pi^{\lambda}_{\nu\mu},\ \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}\, x^{\mu} = 0.\ \Pi^{\lambda}_{\mu\nu,\omega}\, x^{\omega} + \Pi^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$

コヽデ　コンマ　ハ x^{ω} ニ関スル普通ノ偏微分ヲ表ハスコトニスル。

彼ハ　パスノ方程式トシテ

$$(1.3)\qquad \frac{d^2 x^{\lambda}}{dt^2} + \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt} = \alpha x^{\lambda} + \beta\frac{dx^{\lambda}}{dt}$$

ヲトツテヰル。吾々ハ　之ヲ解カウ。サウシテソレラヲ

$$x^{\lambda} = x^{\lambda}(t)$$

デ表ハシテ、$t = u^{1}/u^{0}$ トオケバ、カウシテ吾々ハパスノ別ノ表現

$$(1.4)\qquad x^{\lambda} = x^{\lambda}(u^{0}, u^{1})$$

ヲ得ル。

勿論 $x^{\lambda}(u^{0}, u^{1}) \equiv x^{\lambda}(u^{a})$, $(a = 0, 1)$ ハ 1次ノ斉次函数ト考ヘネバイケナイノデ、u^{a} ト λu^{a} トハ世線上ノ同ジ点ヲ表ハシテヰル。

次ニ u^{a} ナル斉次媒介変数ノ変換ハト云ヘバ、ソレハ

$$(1.5)\qquad u^{a'} = u^{a'}(u^{a})$$

ナル関係デアリ、1次ノ斉次函数デアル。

カヤウナ考ヘカラ、オイラーノ斉次函数定理ニ據ツテ

$$(1.6)\qquad x^{\lambda} = B^{\lambda}_{a}\, u^{a},\quad B^{\lambda}_{a} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^{a}}$$

$$(1.7)\qquad u^{a'} = B^{a'}_{a}\, u^{a},\quad B^{a'}_{a} = \frac{\partial u^{a'}}{\partial u^{a}}$$

トナリ、且又

$$\frac{dx^\lambda}{dt}=B_a^\lambda\frac{du^a}{dt}$$

デアルカラ吾々ハ次ノ関係ヲ得ル。

(1.8) $\quad B_{\hat a}^{\lambda}=p_a\dfrac{dx^\lambda}{dt}+q_a x^\lambda$

(1.8) ト (1.6) カラ

(1.9) $\quad \dfrac{dx^\lambda}{dt}=\eta^a B_{\hat a}^\lambda,\quad x^\lambda=u^a B_{\hat a}^\lambda$

(1.3) ヲ考ヘ乍テ, (1.8) ヲ共変微分スレバ

$B_c^\mu \nabla_\mu B_{\hat a}^\lambda$ ハ x^λ ト $\dfrac{dx^\lambda}{dt}$ ノ一次結合デアリ從ツテ、

(1.9) ニ依ツテ $B_{\hat 0}^\lambda$ ト $B_{\hat c}^\lambda$ トノ一次表示トナル。

ダカラ、カヤウニシテパスノ方程式ハ

(1.10) $\quad B_c^\mu \nabla_\mu B_{\hat b}^\lambda=\partial_c B_{\hat b}^\lambda+\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}B_{c\hat b}^{\mu\nu}=\Gamma_{cb}^{a}B_{\hat a}^\lambda$

ト変ズル。両辺ヲ比ベルト Γ_{cb}^a ハ u^a ノ一ノ次ノ函数ナルコトガ判リシカモ u^a ヲ (1.5) デ変換スルト, Γ_{cb}^a ハ

(1.11) $\quad \Gamma_{c'b'}^{a'}=B_{a\,c'\,b'}^{a'c\,b}\Gamma_{cb}^{a}+B_a^{a'}\partial_{c'}B_{a'}^{a},$

$\qquad\qquad (B_{a\,c'\,b'}^{a'c\,b}=B_a^{a'}B_{c'}^{c}B_{b'}^{b})$

ナル変換ヲ受ケルコトモ判ル。

從ツテ、Γ_{cb}^a ハ H_z ニ於ケル射影接続係数ト考ヘテヨイ訳デアル。

§2. 以上ハ Haantjes ノ論述ソノマヽデアルケレドモ、コノ H_n ト云フ空間ヲ別ノ方向カラ眺メテ、考究シテミヨウ。幸ニモ吾々ハソレヲ指示スル論文ヲモツテ井ル。(2)

結論ヲ述ベレバ

H_n トハ実ハ $n+1$ 次ノ特殊ナ擬似接続空間 A_{n+1} ニ於テ与ヘラレルニ他ナラナイ。

ノデアル。

如何ニモ、$\lambda, \mu, \cdots = 0, 1, \cdots, n$ ニトリ、x^λ ヲ以テ $n+1$ 次元擬似接続空間 A_{n+1} ノ任意ノ一点ノ座標ヲ表ハスモノトシテ、コノ空間ニ反変ベクトル場 ξ^λ ヲ与ヘ接続係数ヲ $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ デ表ハス。

ソシテ、A_{n+1} ニ於テ次ノ特性ヲ与ヘル。

$$(2.1)\quad \begin{cases} \text{(i)} & \Pi^\lambda_{\mu\nu} = \Pi^\lambda_{\nu\mu}, \\ \text{(ii)} & \xi^\lambda_{;\mu} = \delta^\lambda_\mu, \\ \text{(iii)} & \Pi^\lambda_{\mu\nu\omega}\xi^\omega = 0 \end{cases}$$

コヽデ セミコロン ハ共変微分ヲ表ハス。ソシテ

$$(2.2)\quad \Pi^\lambda_{\mu\nu\omega} = \Pi^\lambda_{\mu\nu,\omega} - \Pi^\lambda_{\mu\omega,\nu} + \Pi^\alpha_{\mu\nu}\Pi^\lambda_{\alpha\omega} - \Pi^\alpha_{\mu\omega}\Pi^\lambda_{\alpha\nu}$$

ソレデ吾々ハ特別ナ座標系ヲエランデ

$$(2.3)\quad \xi^\lambda = x^\lambda$$

トスル。コノ関係ヲソノママニスルタメニハ x^λ ハ1次ノ斉次函数デナケレバナラヌコトハ見易イ。

カヤウナ A_{n+1} ハ実ハ §1 ニ於テ考ヘタ H_n ノ一ツノ表示デアル。

実際 (2.1) ノ (i) カラ

$$\Pi^\lambda_{\mu\nu} = \Pi^\lambda_{\nu\mu},$$

(ii) カラ $\dfrac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\mu} + \Pi^\lambda_{\mu\nu}\xi^\mu = \delta^\lambda_\mu$、 $\therefore \Pi^\lambda_{\mu\nu}x^\mu = 0$

之ハ云フマデモナク（1.2）ノ第二式デアル。

（2.1）ノ(iii)カラ

$$\Pi^{\hat{\ }}_{\mu\nu\omega}\,\mathfrak{X}^{\omega}=0$$

（2.2）ヘ $\mathfrak{X}^{\omega}$ ヲ乗ジテ $\Pi^{\hat{\ }}_{\mu\nu}\,\mathfrak{X}^{\mu}=0$ ヲ使フト

$$\Pi^{\hat{\ }}_{\mu\nu,\omega}\,\mathfrak{X}^{\omega}=-\Pi^{\hat{\ }}_{\mu\nu},$$

之ハ（1.2）ノ第三式デアル。

カウシテ吾々ハ $n+1$ 次元ノ擬似接続集合体 A_{n+1} ニ(2.1)ト（2.3）ヲ附帯サセルト，ソレガ H_n ノ別ナ表ハシ方ニナルコトガ判ツタ訳デアル。

ソレデ §1 デ考ヘタパス $\mathfrak{X}^{\lambda}=\mathfrak{X}^{\lambda}(u^{\alpha})$ ヲカヤウナ A_{n+1} ノ中ノパス ト考ヘテ次ノヤウニ推論スル。

Haantjes ハ u－曲面ヲ以テパスヲ表サントシテ居ル、換言スレバ（2.1），（2.3）ヲモツタ A_{n+1} ノ中デパス系ガ与ヘラレテ居テ、之ニ2次元曲面（$u^{\prime}, u^{\prime}$）ガ附随シテヰルノデアル。

シカラバサウ云フ u－平面ハ如何ナルモノデアラウカ?
之ガ幾何学的ニ、Haantjes ノパスヲ説明スル鍵デハナカラウカ?

吾々ハ以下之ニツイテ考ヘテミヤウ。

§3.

コノ曲面ハ H_n 即チ（2.1)．(2.3）ヲモツ A_{n+1} ノ部分空間デアル。ソシテ§1デ考ヘタヤウニ $\Gamma^{a}_{c\,b}$ ナル径数ヲモツテヰテ 丁度 H_1 ニ於ケル射影接続ノ径数ノヤウニ変リシ

カモ (1.10) カラ

$$H_{c\,b}^{\cdot\cdot\,\kappa} \equiv \partial_c B_b^{\kappa} + \Pi_{\mu\lambda}^{\kappa} B_{c\,b}^{\mu\lambda} - \Gamma_{cb}^{a} B_a^{\kappa} = 0$$

ヲ得ル。之ハリーマン幾何学デ云フ オイテースカウテン ノ曲率テンソル ニ相当スル $H_{c\,b}^{\cdot\cdot\,\kappa}$ ガ 0 ト云フコトデアル。云ヒカヘレバ、吾々ノ曲面ハ 全測地曲面ナノデアル。

Haantjes ガ パス ヲ u-parameter デ表ハシタコトハ、パス ヲ全測地曲面デ表現シヨウトイフ下心ガアツタ為カモ知レナイ，事実 Dantzig ノ論文ヲ見ルト[3] パスヲ partial 方程式ニトリ．$H_{c\,b}^{\cdot\cdot\,\kappa} = 0$ デ表ハシテ居ル。

サテ、ソレハサテ置キ

$$\xi^{\lambda} = x^{\lambda} = B_a^{\lambda} u^a$$

ダカラ、之ヲ u^b ニツキ共変微分スルト

$$(3.1) \quad \xi^{\lambda}_{;\mu} B_b^{\mu} = H_{a\,b}^{\cdot\cdot\,\lambda} u^a + B_a^{\lambda} u^a_{;b} = B_a^{\lambda} u^a_{;b}$$

モウ一度之ヲ u^c デ共変微分シテ．

$$(3.2) \quad \xi^{\lambda}_{;\mu;\nu} B_b^{\mu} B_c^{\nu} = B_a^{\lambda} u^a_{;b;c}$$

ダカラ

$$(3.3) \quad u^a_{;b;c} = B_{\lambda\,b\,c}^{a\,\mu\nu} \xi^{\lambda}_{;\mu;\nu} ,$$

コヽデ Gauss ノ方程式ヲ想ヒ出セバ

$$\Pi_{bcd}^{a} = B_{\lambda\,b\,c}^{a\,\mu\nu} B_d^{\omega} \Pi_{\mu\nu\omega}^{\lambda} - H_{b\,c}^{\cdot\cdot\,x} L_{(x)d}^{a} + H_{b\,d}^{\cdot\cdot\,x} L_{(x)c}^{a}$$
$$= B_{\lambda\,b\,c}^{a\,\mu\nu} B_d^{\omega} \Pi_{\mu\nu\omega}^{\lambda} ,$$

カクシテ

$$U^a_{;b;c} + \Pi^a_{bcd}\, U^d = B^{a\mu\nu}_{\lambda bc} \left(\xi^\lambda_{;\mu;\nu} + \Pi^\lambda_{\mu\nu\omega}\, \xi^\omega \right)$$
$$= 0$$

又 (3.1) カラ　$U^a_{;b} = \delta^a_b$

コレラニツノ結果ノ云フトコロハ吾々ノ曲面ガ U^a ノ方向ニ擬似相称ヲ許容スルトイフコトデアル。

シカモ亦　$\Pi^a_{bcd}\, U^d = 0$

之カラ Haantjes ガヤツテヰルヤウニ 非幾何學的ニ（代数的ニ）

$$\Pi^a_{bcd} = 0$$

トナル。

カウシテ、トモ角モ、Haantjes ガ パス ト呼ビ論及シテヰルトコロハ、更ニハツキリト、幾何學的ニ述べ換ヘラレヨウト云フモノデアル。

即チ　Haantjes ノ パス トハ A_{n+1} ト云フ擬似接続空間ニ特殊性ヲ与ヘタ空間デ考ヘテミルト、全測地曲面デアル上ニ擬似相称ヲ許容シ、平坦デアル。

ト云フノデアル。

文中ノ肩ニシルシタ (1), (2), (3) ハ次ノ論文ヲ示ス。

(1) J. Haantjes : On the projective geometry of paths, proc. Edinburgh Math. Soc. 5 (1937), 103－115.

(2) K. Yano : Les espaces à connexion projective et la geométrie des paths.

Thèse. Paris. (1938).

(3) D. van Dantzig: Theorie des projektiven Zusammenhangs n-dimensionaler Räume. Math. Annalen. Band 106. (1932).

—冬至近ク— 1944 —